数　学　I

（全　問　必　答）

第１問　（配点　20）

〔1〕　実数 x についての不等式

$$|x+6| \leqq 2$$

の解は

$$\boxed{\text{アイ}} \leqq x \leqq \boxed{\text{ウエ}}$$

である。

よって，実数 a，b，c，d が

$$|(1-\sqrt{3})(a-b)(c-d)+6| \leqq 2$$

を満たしているとき，$1-\sqrt{3}$ は負であることに注意すると，$(a-b)(c-d)$ のとり得る値の範囲は

$$\boxed{\text{オ}} + \boxed{\text{カ}}\sqrt{3} \leqq (a-b)(c-d) \leqq \boxed{\text{キ}} + \boxed{\text{ク}}\sqrt{3}$$

であることがわかる。

（数学 I 第１問は次ページに続く。）

特に

$$(a-b)(c-d)=\boxed{\text{キ}}+\boxed{\text{ク}}\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{①}$$

であるとき，さらに

$$(a-c)(b-d)=-3+\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{②}$$

が成り立つならば

$$(a-d)(c-b)=\boxed{\text{ケ}}+\boxed{\text{コ}}\sqrt{3} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \text{③}$$

であることが，等式①，②，③の左辺を展開して比較することによりわかる。

（数学 I 第 1 問は次ページに続く。）

〔2〕 U を全体集合とし，A，B，C を U の部分集合とする。U の部分集合 X に対して，X の補集合を $\overline{X}$ で表す。

(1) U，A，B，C の関係を図1のように表すと，例えば，$A\cap(B\cup C)$ は A と $B\cup C$ の共通部分で，$B\cup C$ は図2の斜線部分なので，$A\cap(B\cup C)$ は図3の斜線部分となる。

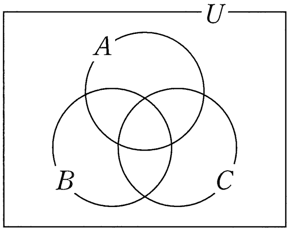


図 1

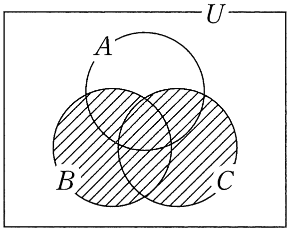


図 2

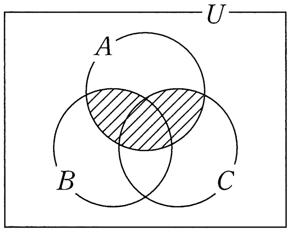
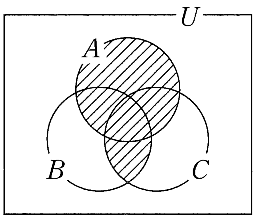
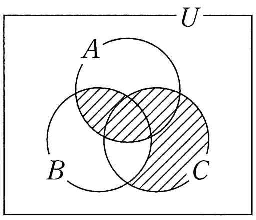


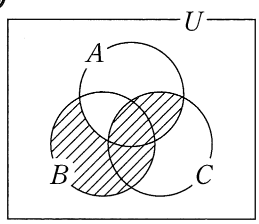
図 3

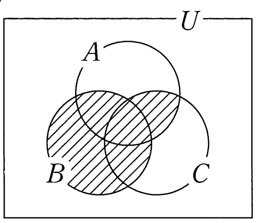
このとき，$(A\cap\overline{C})\cup(B\cap C)$ は $\boxed{\text{サ}}$ の斜線部分である。

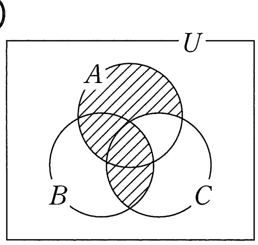
$\boxed{\text{サ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

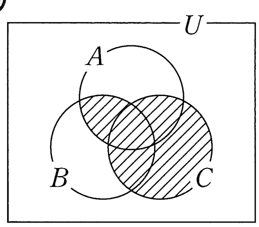
⓪


①


②


③


④


⑤


(数学Ⅰ第1問は次ページに続く。)

(2) 全体集合 U を

$$U=\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$$

とする。また，U の部分集合 A，B を次のように定める。

$$A=\{0,2,3,4,6,8,9\},\quad B=\{1,3,5,6,7,9\}$$

(i) このとき

$$A\cap B=\left\{\boxed{\text{シ}},\ \boxed{\text{ス}},\ \boxed{\text{セ}}\right\}$$

$$\overline{A}\cap B=\left\{\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}},\ \boxed{\text{チ}}\right\}$$

である。ただし

$\boxed{\text{シ}}<\boxed{\text{ス}}<\boxed{\text{セ}}$，$\boxed{\text{ソ}}<\boxed{\text{タ}}<\boxed{\text{チ}}$

とする。

(ii) U の部分集合 C は

$$(A\cap\overline{C})\cup(B\cap C)=A$$

を満たすとする。このとき，次のことが成り立つ。

- $\overline{A}\cap B$ の $\boxed{\text{ツ}}$。
- $A\cap\overline{B}$ の $\boxed{\text{テ}}$。

$\boxed{\text{ツ}}$，$\boxed{\text{テ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ すべての要素は C の要素である

① どの要素も C の要素ではない

② 要素には，C の要素であるものと，C の要素でないものがある

第2問 （配点　30）

(1) 点Oを中心とし，半径が5である円Oがある。この円周上に2点A，Bを$AB = 6$となるようにとる。また，円Oの円周上に，2点A，Bとは異なる点Cをとる。

(i) $\sin \angle ACB = \boxed{ア}$である。また，点Cを$\angle ACB$が鈍角となるようにとるとき，$\cos \angle ACB = \boxed{イ}$である。

(ii) 点Cを$\angle ACB$が鈍角で$BC = 5$となるようにとる。このとき，

$AC = \boxed{ウ}\sqrt{\boxed{エ}} - \boxed{オ}$である。

(iii) 点Cを△ABCの面積が最大となるようにとる。点Cから直線ABに垂直な直線を引き，直線ABとの交点をDとするとき，$\tan \angle OAD = \boxed{カ}$である。また，△ABCの面積は$\boxed{キク}$である。

（数学Ⅰ第2問は次ページに続く。）

(iv) 点 C を，(iii) と同様に，△ABC の面積が最大となるようにとる。このとき，$\tan \angle ACB =$ $\boxed{ケ}$ である。

さらに，点 C を通り直線 AC に垂直な直線を引き，直線 AB との交点を E とする。このとき，$\sin \angle BCE =$ $\boxed{コ}$ である。

点 F を線分 CE 上にとるとき，BF の長さの最小値は $\dfrac{\boxed{サシ}\sqrt{\boxed{スセ}}}{\boxed{ソ}}$ である。

$\boxed{ア}$，$\boxed{イ}$，$\boxed{カ}$，$\boxed{ケ}$，$\boxed{コ}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ $\frac{3}{5}$	① $\frac{3}{4}$	② $\frac{4}{5}$	③ 1	④ $\frac{4}{3}$
⑤ $-\frac{3}{5}$	⑥ $-\frac{3}{4}$	⑦ $-\frac{4}{5}$	⑧ -1	⑨ $-\frac{4}{3}$

(数学 I 第 2 問は次ページに続く。)

(2) 半径が5である球Sがある。この球面上に3点P，Q，Rをとったとき，これらの3点を通る平面α上でPQ = 8，QR = 5，RP = 9であったとする。

球Sの球面上に点Tを三角錐(すい)TPQRの体積が最大となるようにとるとき，その体積を求めよう。

まず，$\cos\angle\mathrm{QPR} = \dfrac{\boxed{タ}}{\boxed{チ}}$であることから，△PQRの面積は$\boxed{ツ}\sqrt{\boxed{テト}}$である。

次に，点Tから平面αに垂直な直線を引き，平面αとの交点をHとする。このとき，PH，QH，RHの長さについて，$\boxed{ナ}$が成り立つ。

以上より，三角錐TPQRの体積は$\boxed{ニヌ}\left(\sqrt{\boxed{ネノ}}+\sqrt{\boxed{ハ}}\right)$である。

$\boxed{ナ}$の解答群

⓪ PH < QH < RH	① PH < RH < QH
② QH < PH < RH	③ QH < RH < PH
④ RH < PH < QH	⑤ RH < QH < PH
⑥ PH = QH = RH	

（下 書 き 用 紙）

数学 I の試験問題は次に続く。

数学Ⅰ

第3問 (配点　20)

太郎さんは，総務省が公表している2020年の家計調査の結果を用いて，地域による食文化の違いについて考えている。家計調査における調査地点は，都道府県庁所在市および政令指定都市(都道府県庁所在市を除く)であり，合計52市である。家計調査の結果の中でも，スーパーマーケットなどで販売されている調理食品の「二人以上の世帯の1世帯当たり年間支出金額(以下，支出金額，単位は円)」を分析することにした。以下においては，52市の調理食品の支出金額をデータとして用いる。

太郎さんは調理食品として，最初にうなぎのかば焼き(以下，かば焼き)に着目し，図1のように52市におけるかば焼きの支出金額のヒストグラムを作成した。ただし，ヒストグラムの各階級の区間は，左側の数値を含み，右側の数値を含まない。

なお，以下の図や表については，総務省のWebページをもとに作成している。

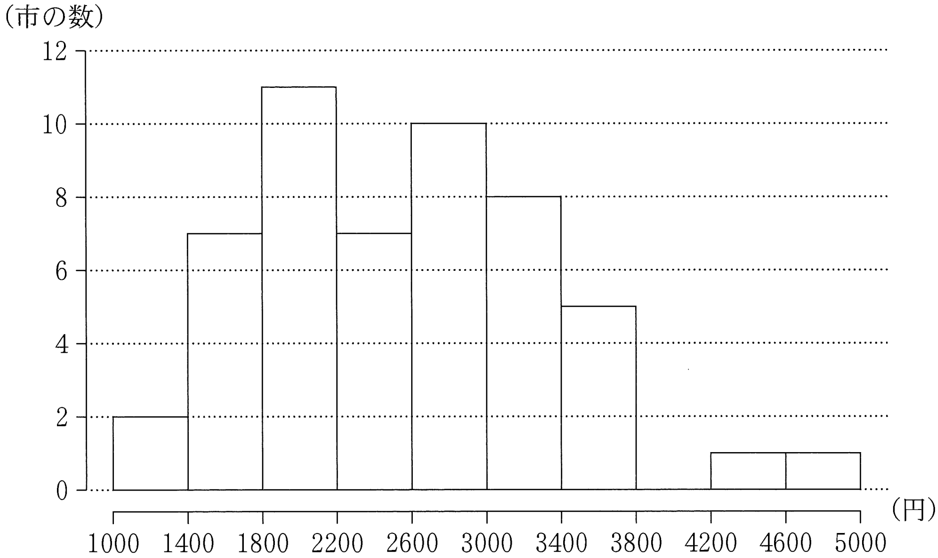


図1　かば焼きの支出金額のヒストグラム

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(1) 図1から次のことが読み取れる。

- 中央値が含まれる階級は $\boxed{\text{ア}}$ である。
- 第1四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{イ}}$ である。
- 第3四分位数が含まれる階級は $\boxed{\text{ウ}}$ である。
- 四分位範囲は $\boxed{\text{エ}}$ 。

$\boxed{\text{ア}}$ ～ $\boxed{\text{ウ}}$ の解答群(同じものを繰り返し選んでもよい。)

⓪ 1000以上1400未満	① 1400以上1800未満
② 1800以上2200未満	③ 2200以上2600未満
④ 2600以上3000未満	⑤ 3000以上3400未満
⑥ 3400以上3800未満	⑦ 3800以上4200未満
⑧ 4200以上4600未満	⑨ 4600以上5000未満

$\boxed{\text{エ}}$ の解答群

⓪ 800より小さい
① 800より大きく1600より小さい
② 1600より大きく2400より小さい
③ 2400より大きく3200より小さい
④ 3200より大きく4000より小さい
⑤ 4000より大きい

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(2) 太郎さんは，東西での地域による食文化の違いを調べるために，52 市を東側の地域 E(19 市)と西側の地域 W(33 市)の二つに分けて考えることにした。

(i) 地域 E と地域 W について，かば焼きの支出金額の箱ひげ図を，図 2，図 3 のようにそれぞれ作成した。

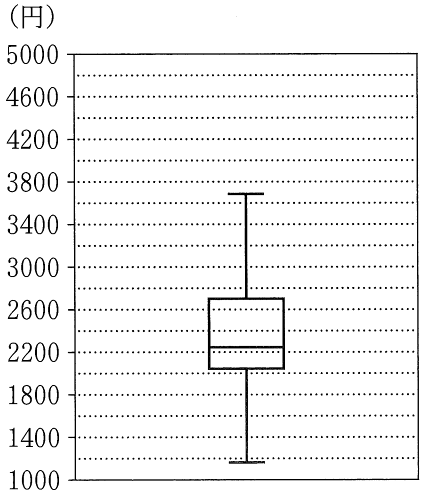


図 2　地域 E におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

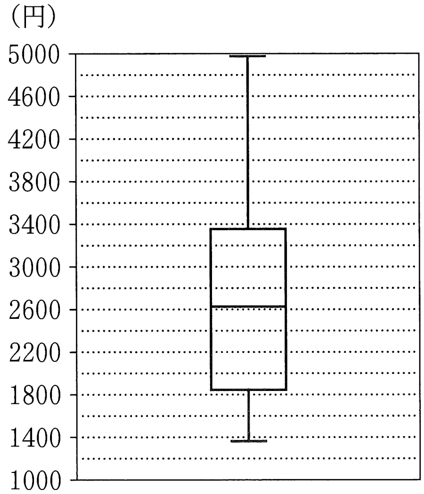


図 3　地域 W におけるかば焼きの支出金額の箱ひげ図

かば焼きの支出金額について，図 2 と図 3 から読み取れることとして，次の ⓪～③ のうち，正しいものは $\boxed{\text{オ}}$ である。

$\boxed{\text{オ}}$ の解答群

⓪ 地域 E において，小さい方から 5 番目は 2000 以下である。
① 地域 E と地域 W の範囲は等しい。
② 中央値は，地域 E より地域 W の方が大きい。
③ 2600 未満の市の割合は，地域 E より地域 W の方が大きい。

(数学 I 第 3 問は次ページに続く。)

(ii) 太郎さんは，地域Eと地域Wのデータの散らばりの度合いを数値でとらえようと思い，それぞれの分散を考えることにした。地域Eにおけるかば焼きの支出金額の分散は，地域Eのそれぞれの市におけるかば焼きの支出金額の偏差の $\boxed{\text{カ}}$ である。

$\boxed{\text{カ}}$ の解答群

⓪ 2乗を合計した値
① 絶対値を合計した値
② 2乗を合計して地域Eの市の数で割った値
③ 絶対値を合計して地域Eの市の数で割った値
④ 2乗を合計して地域Eの市の数で割った値の平方根のうち正のもの
⑤ 絶対値を合計して地域Eの市の数で割った値の平方根のうち正のもの

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

⑶　太郎さんは，⑵で考えた地域Eにおける，やきとりの支出金額についても調べることにした。

ここでは地域Eにおいて，やきとりの支出金額が増加すれば，かば焼きの支出金額も増加する傾向があるのではないかと考え，まず図4のように，地域Eにおける，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図を作成した。そして，相関係数を計算するために，表1のように平均値，分散，標準偏差および共分散を算出した。ただし，共分散は地域Eのそれぞれの市における，やきとりの支出金額の偏差とかば焼きの支出金額の偏差との積の平均値である。

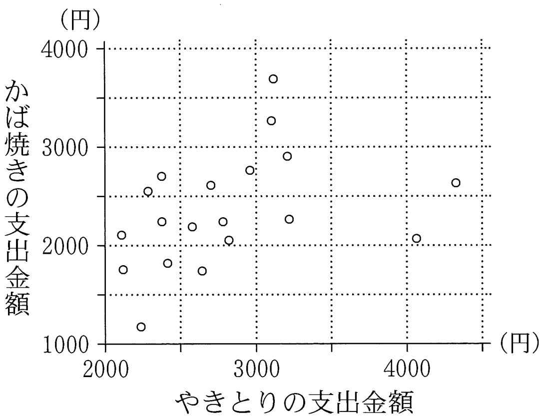


図4　地域Eにおける，やきとりとかば焼きの支出金額の散布図

表1　地域Eにおける，やきとりとかば焼きの支出金額の平均値，分散，標準偏差および共分散

	平均値	分　散	標準偏差	共分散
やきとりの支出金額	2810	348100	590	124000
かば焼きの支出金額	2350	324900	570	

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(i) 表1を用いると，地域Eにおける，やきとりの支出金額とかば焼きの支出金額の相関係数は $\boxed{\text{キ}}$ である。

$\boxed{\text{キ}}$ については，最も適当なものを，次の⓪～⑨のうちから一つ選べ。

⓪ -0.62	① -0.50	② -0.37	③ -0.19
④ -0.02	⑤ 0.02	⑥ 0.19	⑦ 0.37
⑧ 0.50	⑨ 0.62		

(数学Ⅰ第3問は次ページに続く。)

(ii) 地域Eの19市それぞれにおける，やきとりの支出金額 x とかば焼きの支出金額 y の値の組を

$$(x_1,\ y_1),\ (x_2,\ y_2),\ \cdots,\ (x_{19},\ y_{19})$$

とする。この支出金額のデータを千円単位に変換することを考える。地域Eにおいて千円単位に変換した，やきとりの支出金額 x' とかば焼きの支出金額 y' の値の組を

$$(x'_1,\ y'_1),\ (x'_2,\ y'_2),\ \cdots,\ (x'_{19},\ y'_{19})$$

とすると

$$\begin{cases} x'_i = \dfrac{x_i}{1000} \\ y'_i = \dfrac{y_i}{1000} \end{cases} \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ 19)$$

と表される。このとき，次のことが成り立つ。

- x' の分散は $\boxed{\text{ク}}$ となる。
- x' と y' の相関係数は，x と y の相関係数 $\boxed{\text{ケ}}$。

(数学 I 第3問は次ページに続く。)

$\boxed{\text{ク}}$ の解答群

⓪ $\dfrac{348100}{1000^2}$	① $\dfrac{348100}{1000}$	② 348100
③ 1000×348100	④ $1000^2 \times 348100$	

$\boxed{\text{ケ}}$ の解答群

⓪ の $\dfrac{1}{1000^2}$ 倍となる	① の $\dfrac{1}{1000}$ 倍となる	② と等しい
③ の 1000 倍となる	④ の 1000^2 倍となる	

第4問 (配点 30)

〔1〕 p を実数とし，$f(x)=(x-2)(x-8)+p$ とする。

(1) 2次関数 $y=f(x)$ のグラフの頂点の座標は

$$\left(\boxed{\text{ア}},\ \boxed{\text{イウ}}+p\right)$$

である。

(2) 2次関数 $y=f(x)$ のグラフと x 軸との位置関係は，p の値によって次のように三つの場合に分けられる。

$p>\boxed{\text{エ}}$ のとき，2次関数 $y=f(x)$ のグラフは x 軸と共有点をもたない。

$p=\boxed{\text{エ}}$ のとき，2次関数 $y=f(x)$ のグラフは x 軸と点 $\left(\boxed{\text{オ}},\ 0\right)$ で接する。

$p<\boxed{\text{エ}}$ のとき，2次関数 $y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる2点で交わる。

(数学Ⅰ第4問は次ページに続く。)

(3)　2 次関数 $y = f(x)$ のグラフを x 軸方向に -3，y 軸方向に 5 だけ平行移動した放物線をグラフとする 2 次関数を $y = g(x)$ とすると

$$g(x) = x^2 - \boxed{\text{カ}}\,x + p$$

となる。

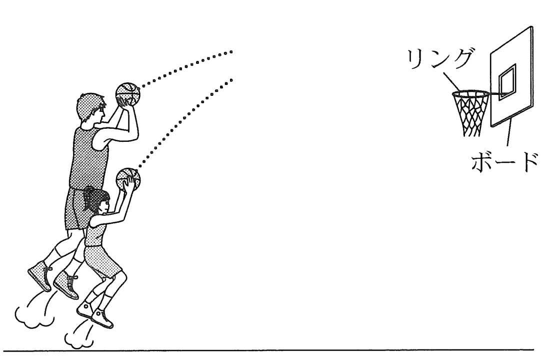
関数 $y = |f(x) - g(x)|$ のグラフを考えることにより，

関数 $y = |f(x) - g(x)|$ は $x = \dfrac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$ で最小値をとることがわかる。

（数学 I 第 4 問は次ページに続く。）

〔2〕 太郎さんと花子さんは，バスケットボールのプロ選手の中には，リングと同じ高さでシュートを打てる人がいることを知り，シュートを打つ高さによってボールの軌道がどう変わるかについて考えている。

二人は，図1のように座標軸が定められた平面上に，プロ選手と花子さんがシュートを打つ様子を真横から見た図をかき，ボールがリングに入った場合について，後の**仮定**を設定して考えることにした。長さの単位はメートルであるが，以下では省略する。



参考図

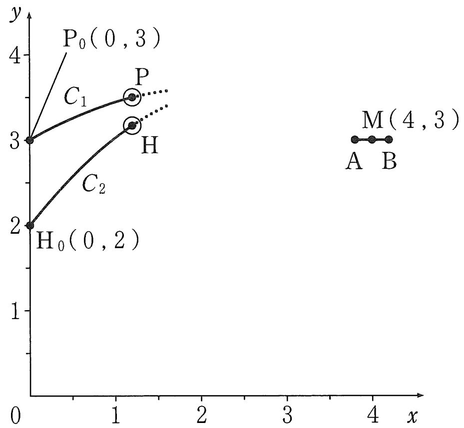


図 1

（数学Ⅰ第4問は次ページに続く。）

仮定

- 平面上では，ボールを直径 0.2 の円とする。
- リングを真横から見たときの左端を点 A(3.8 , 3), 右端を点 B(4.2 , 3) とし，リングの太さは無視する。
- ボールがリングや他のものに当たらずに上からリングを通り，かつ，ボールの中心が AB の中点 M(4 , 3)を通る場合を考える。ただし，ボールがリングに当たるとは，ボールの中心と A または B との距離が 0.1 以下になることとする。
- プロ選手がシュートを打つ場合のボールの中心を点 P とし，P は，はじめに点 P_0(0 , 3)にあるものとする。また，P_0，M を通る，上に凸の放物線を C_1 とし，P は C_1 上を動くものとする。
- 花子さんがシュートを打つ場合のボールの中心を点 H とし，H は，はじめに点 H_0(0 , 2)にあるものとする。また，H_0，M を通る，上に凸の放物線を C_2 とし，H は C_2 上を動くものとする。
- 放物線 C_1 や C_2 に対して，頂点の y 座標を「**シュートの高さ**」とし，頂点の x 座標を「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」とする。

(1) 放物線 C_1 の方程式における x^2 の係数を a とする。放物線 C_1 の方程式は

$$y = ax^2 - \boxed{\text{ケ}}\,ax + \boxed{\text{コ}}$$

と表すことができる。また，プロ選手の「**シュートの高さ**」は

$$-\boxed{\text{サ}}\,a + \boxed{\text{シ}}$$

である。

(数学Ⅰ第 4 問は次ページに続く。)

放物線 C_2 の方程式における x^2 の係数を p とする。放物線 C_2 の方程式は

$$y = p\left\{x - \left(2 - \frac{1}{8p}\right)\right\}^2 - \frac{(16p-1)^2}{64p} + 2$$

と表すことができる。

プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の比較の記述として，次の⓪～③のうち，正しいものは $\boxed{ス}$ である。

$\boxed{ス}$ の解答群

⓪ プロ選手と花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」は，つねに一致する。

① プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。

② 花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が，つねに M の x 座標に近い。

③ プロ選手の「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもあれば，花子さんの「**ボールが最も高くなるときの地上の位置**」の方が M の x 座標に近いときもある。

（数学 I 第 4 問は 26 ページに続く。）

（下 書 き 用 紙）

数学Ｉの試験問題は次に続く。

(2) 二人は，ボールがリングすれすれを通る場合のプロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」について次のように話している。

太郎：例えば，プロ選手のボールがリングに当たらないようにするには，Pがリングの左端Aのどのくらい上を通れば良いのかな。

花子：Aの真上の点でPが通る点Dを，線分DMがAを中心とする半径0.1の円と接するようにとって考えてみたらどうかな。

太郎：なるほど。Pの軌道は上に凸の放物線で山なりだから，その場合，図2のように，PはDを通った後で線分DMより上側を通るのでボールはリングに当たらないね。花子さんの場合も，HがこのDを通れば，ボールはリングに当たらないね。

花子：放物線 C_1 と C_2 がDを通る場合でプロ選手と私の「**シュートの高さ**」を比べてみようよ。

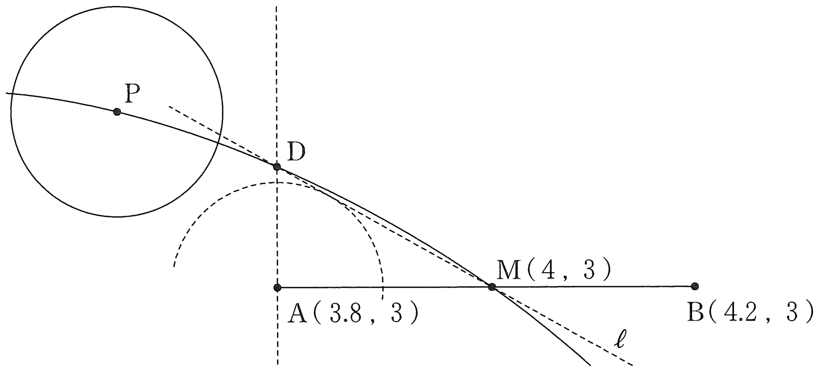


図 2

(数学 I 第4問は次ページに続く。)

図2のように，Mを通る直線ℓが，Aを中心とする半径0.1の円に直線ABの上側で接しているとする。また，Aを通り直線ABに垂直な直線を引き，ℓとの交点をDとする。このとき，$AD = \dfrac{\sqrt{3}}{15}$である。

よって，放物線C_1がDを通るとき，C_1の方程式は

$$y = -\frac{\boxed{セ}\sqrt{\boxed{ソ}}}{\boxed{タチ}}\left(x^2 - \boxed{ケ}\,x\right) + \boxed{コ}$$

となる。

また，放物線C_2がDを通るとき，(1)で与えられたC_2の方程式を用いると，花子さんの「**シュートの高さ**」は約3.4と求められる。

以上のことから，放物線C_1とC_2がDを通るとき，プロ選手と花子さんの「**シュートの高さ**」を比べると，$\boxed{ツ}$の「**シュートの高さ**」の方が大きく，その差はボール$\boxed{テ}$である。なお，$\sqrt{3} = 1.7320508\cdots$である。

$\boxed{ツ}$の解答群

⓪ プロ選手	① 花子さん

$\boxed{テ}$については，最も適当なものを，次の⓪〜③のうちから一つ選べ。

⓪ 約1個分	① 約2個分	② 約3個分	③ 約4個分

（下 書 き 用 紙）