数　学　Ⅱ

（全　問　必　答）

第１問　（配点　30）

〔1〕

(1)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき

$$\sin\theta > \sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

となる θ の値の範囲を求めよう。

加法定理を用いると

$$\sqrt{3}\cos\left(\theta - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{\boxed{\text{ア}}}}{\boxed{\text{イ}}}\cos\theta + \frac{\boxed{\text{ウ}}}{\boxed{\text{イ}}}\sin\theta$$

である。よって，三角関数の合成を用いると，① は

$$\sin\left(\theta + \frac{\pi}{\boxed{\text{エ}}}\right) < 0$$

と変形できる。したがって，求める範囲は

$$\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\pi < \theta < \frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}\pi$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ とし，k を実数とする。$\sin\theta$ と $\cos\theta$ は x の2次方程式 $25x^2 - 35x + k = 0$ の解であるとする。このとき，解と係数の関係により $\sin\theta + \cos\theta$ と $\sin\theta\cos\theta$ の値を考えれば，$k = \boxed{\text{ケコ}}$ であることがわかる。

さらに，θ が $\sin\theta \geqq \cos\theta$ を満たすとすると，$\sin\theta = \frac{\boxed{\text{サ}}}{\boxed{\text{シ}}}$，$\cos\theta = \frac{\boxed{\text{ス}}}{\boxed{\text{セ}}}$ である。このとき，θ は $\boxed{\text{ソ}}$ を満たす。$\boxed{\text{ソ}}$ に当てはまるものを，次の⓪～⑤のうちから一つ選べ。

⓪　$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{12}$　　①　$\frac{\pi}{12} \leqq \theta < \frac{\pi}{6}$　　②　$\frac{\pi}{6} \leqq \theta < \frac{\pi}{4}$

③　$\frac{\pi}{4} \leqq \theta < \frac{\pi}{3}$　　④　$\frac{\pi}{3} \leqq \theta < \frac{5}{12}\pi$　　⑤　$\frac{5}{12}\pi \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$

(数学Ⅱ第1問は次ページに続く。)

〔2〕

(1) t は正の実数であり，$t^{\frac{1}{3}} - t^{-\frac{1}{3}} = -3$ を満たすとする。このとき

$$t^{\frac{2}{3}} + t^{-\frac{2}{3}} = \boxed{\text{タチ}}$$

である。さらに

$$t^{\frac{1}{3}} + t^{-\frac{1}{3}} = \sqrt{\boxed{\text{ツテ}}},\quad t - t^{-1} = \boxed{\text{トナニ}}$$

である。

（数学Ⅱ第１問は次ページに続く。）

⑵ x，y は正の実数とする。連立不等式

$$\begin{cases} \log_3(x\sqrt{y}) \leqq 5 & \cdots\cdots ② \\ \log_{81}\dfrac{y}{x^3} \leqq 1 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

について考える。

$X = \log_3 x$，$Y = \log_3 y$ とおくと，② は

$\boxed{\text{ヌ}}\,X + Y \leqq \boxed{\text{ネノ}}$ ……④

と変形でき，③ は

$\boxed{\text{ハ}}\,X - Y \geqq \boxed{\text{ヒフ}}$ ……⑤

と変形できる。

X，Y が ④ と ⑤ を満たすとき，Y のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ヘ}}$ である。また，x，y が ②，③ と $\log_3 y = \boxed{\text{ヘ}}$ を同時に満たすとき，x のとり得る最大の整数の値は $\boxed{\text{ホ}}$ である。

数学Ⅱ

第2問 (配点 30)

$a > 0$ とし，$f(x) = x^2 - (4a - 2)x + 4a^2 + 1$ とおく。座標平面上で，放物線 $y = x^2 + 2x + 1$ を C，放物線 $y = f(x)$ を D とする。また，ℓ を C と D の両方に接する直線とする。

(1) ℓ の方程式を求めよう。

ℓ と C は点 $(t,\ t^2 + 2t + 1)$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{ア}}\,t + \boxed{\text{イ}}\right)x - t^2 + \boxed{\text{ウ}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

である。また，ℓ と D は点 $(s,\ f(s))$ において接するとすると，ℓ の方程式は

$$y = \left(\boxed{\text{エ}}\,s - \boxed{\text{オ}}\,a + \boxed{\text{カ}}\right)x - s^2 + \boxed{\text{キ}}\,a^2 + \boxed{\text{ク}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

である。ここで，①と②は同じ直線を表しているので，$t = \boxed{\text{ケ}}$，$s = \boxed{\text{コ}}\,a$ が成り立つ。

したがって，ℓ の方程式は $y = \boxed{\text{サ}}\,x + \boxed{\text{シ}}$ である。

(数学Ⅱ第2問は次ページに続く。)

(2) 二つの放物線 C, D の交点の x 座標は $\boxed{\text{ス}}$ である。

C と直線 ℓ，および直線 $x = \boxed{\text{ス}}$ で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \frac{a^{\boxed{\text{セ}}}}{\boxed{\text{ソ}}}$$

である。

(3) $a \geqq \dfrac{1}{2}$ とする。二つの放物線 C, D と直線 ℓ で囲まれた図形の中で $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす部分の面積 T は，$a > \boxed{\text{タ}}$ のとき，a の値によらず

$$T = \frac{\boxed{\text{チ}}}{\boxed{\text{ツ}}}$$

であり，$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ のとき

$$T = -\boxed{\text{テ}}\,a^3 + \boxed{\text{ト}}\,a^2 - \boxed{\text{ナ}}\,a + \frac{\boxed{\text{ニ}}}{\boxed{\text{ヌ}}}$$

である。

(4) 次に，(2), (3) で定めた S, T に対して，$U = 2T - 3S$ とおく。a が $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \boxed{\text{タ}}$ の範囲を動くとき，U は $a = \dfrac{\boxed{\text{ネ}}}{\boxed{\text{ノ}}}$ で最大値 $\dfrac{\boxed{\text{ハ}}}{\boxed{\text{ヒフ}}}$ をとる。

第3問 （配点　20）

Oを原点とする座標平面上に点A(0, 6)がある。点Aを通る傾きmの直線をℓとし，中心が点(0, 2)でx軸に接する円をCとする。

(1) 直線ℓの方程式は$y = mx + \boxed{\text{ア}}$である。また，円$C$の方程式は$x^2 + \left(y - \boxed{\text{イ}}\right)^2 = \boxed{\text{ウ}}$である。

(2) $m = \pm\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$のとき，直線$\ell$と円$C$は接する。$m = -\sqrt{\boxed{\text{エ}}}$のときの接点の座標は$\left(\sqrt{\boxed{\text{オ}}},\ \boxed{\text{カ}}\right)$である。

(3) 直線ℓと円Cが異なる2点で交わるようなmのうち，最小の正の整数は$\boxed{\text{キ}}$である。

（数学Ⅱ第3問は次ページに続く。）

(4) 直線 ℓ が点 B(3 , 0) を通るとき，$m = \boxed{\text{クケ}}$ である。さらに，直線 ℓ と円 C の二つの交点を点 A に近い方から順に点 D，点 E とすれば，座標はそれぞれ

$$\mathrm{D}\left(\frac{\boxed{\text{コ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シス}}}{\boxed{\text{セ}}}\right),\quad \mathrm{E}\left(\boxed{\text{ソ}},\ \boxed{\text{タ}}\right)$$

である。

このとき，次のように △ODE の面積 S を求めよう。まず，△OAB の面積は $\boxed{\text{チ}}$ である。また，点 A，D，E，B の各 x 座標の値により，三つの線分 AD，DE，EB の長さの比は

$$\mathrm{AD} : \mathrm{DE} : \mathrm{EB} = \boxed{\text{ツ}} : \boxed{\text{テ}} : 5$$

であることがわかる。このことから，$S = \dfrac{\boxed{\text{トナ}}}{\boxed{\text{ニ}}}$ である。

第4問 (配点 20)

4次の整式 $P(x) = 2x^4 - 7x^3 + 8x^2 - 21x + 18$ について考える。

(1) 方程式 $P(x) = 0$ の解を求めよう。

$P(0) \neq 0$ であるから，$x = 0$ は $P(x) = 0$ の解ではない。そこで，$P(x) = 0$ の両辺を x^2 で割ると

$$2x^2 - 7x + 8 - \frac{21}{x} + \frac{18}{x^2} = 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

を得る。$t = x + \dfrac{3}{x}$ とおき，① の左辺を t を用いて表すことにより

$$\boxed{ア}\,t^2 - \boxed{イ}\,t - \boxed{ウ} = 0$$

を得る。これを解くと，$t = \boxed{エ}$, $\dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ となる。

$t = \boxed{エ}$ のとき，$x = \boxed{ク}$, $\boxed{ケ}$ である。ただし，$\boxed{ク} < \boxed{ケ}$ とする。

また，$t = \dfrac{\boxed{オカ}}{\boxed{キ}}$ のとき，$x = \dfrac{\boxed{コサ} \pm \sqrt{\boxed{シス}}\,i}{\boxed{セ}}$ である。

(数学Ⅱ第4問は次ページに続く。)

(2) $\alpha = 1 - \sqrt{3}\,i$ に対して，$P(\alpha)$の値を求めよう。

$(\alpha - 1)^2 = \boxed{ソタ}$ である。これを整理すると

$$\alpha^2 - \boxed{チ}\,\alpha + \boxed{ツ} = 0$$

である。

$P(x)$を $x^2 - \boxed{チ}\,x + \boxed{ツ}$ で割ると，商は

$$\boxed{テ}\,x^2 - \boxed{ト}\,x - \boxed{ナ}$$

で，余りは

$$\boxed{ニヌネ}\left(x - \boxed{ノ}\right)$$

である。

したがって，$P(\alpha) = \boxed{ハヒ}\left(\boxed{フ} + \sqrt{3}\,i\right)$である。

（下 書 き 用 紙）